**SEB Kap. II** <u>**„Einführung des Ableitungsbegriffs“**</u>

Mathematik E; 2017

**Verfahren:** Um Ihre Kenntnisse und Fähigkeiten zu diesem Thema besser einschätzen zu können, bearbeiten Sie bitte **zuerst** die Aufgaben des Grundlagentests alleine. Vergleichen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mit den Kontrolllösungen und führen Sie Ihre Selbsteinschätzung durch.

**Themenübersicht und Selbsteinschätzung**

| | **Aufgaben (Kapitel/Nr.)** | **Diese Aspekte beherrsche ich und kann** | ++ | $\pm$ | -- |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | S. 68 - 75<br>Üb. 2<br>Üb. 4-8<br>Üb. 16-19 | - den **Grenzwert einer Funktion** am **Definitionsrand bestimmen**:<br>a) Verhalten für x gegen Plus- oder Minusunendlich.<br>b) Verhalten von f an einer **Definitionslücke**.<br>c) Anwendungsaufgaben lösen. | | | |
| **2** | S. 76 - 83<br>Üb. 4 – 9<br>S. 103<br>Üb. 14 | - zu zwei vorgegebenen Stellen $x_0$ und $x_0$ +h den **Differenzen-quotienten** einer Funktion f aufstellen und berechnen und das Ergebnis im Sachzusammenhang als **mittlere Änderungs-rate** der Funktion f im Intervall $[x_0; x_0+h]$ interpretieren. | | | |
| **3** | S. 84 - 93<br>S. 93<br>Üb. 1 – 7<br>S. 103<br>Üb. 9; 14 | - zu einer vorgegebenen Stellen $x_0$ den **Grenzwert des Differenzenquotienten** einer Funktion mit der **($x$-$x_0$) - Methode** , **h – Methode**, **grapischen Methode** und mit der **Tabellen-Methode** berechnen und das Ergebnis im Sachzusammenhang als **lokale Änderungsrate** der Funktion f an der Stelle $x_0$ interpretieren. | | | |
| **4** | S. 96 - 97;<br>Üb. 8<br>S. 103 Üb. 10 | - die **Ableitungsfunktion** f‘ einer Funktion f als **Grenzwert des Differenzenquotienten** berechnen und deren Graphen einander zuordnen. | | | |
| **5** | S. 94-95,<br>S. 78-79<br>S. 84-85 | - den Zusammenhang zwischen **Ableitungsfunktion** f‘, **Grenzwert des Differenzenquotienten**, **Tangentensteigung** und **lokale Änderungsrate** einer Funktion f erläutern. | | | |
| **6** | S.98 - 104<br>Üb. 5-7; 17 | - die **elementaren Ableitungsregeln**: **Potenz-, Summen-** und **Faktorrege**l sicher anwenden. | | | |
| **7** | S. 103 - 104<br>Üb. 13<br>Üb. 15, 16, 19 | - die Steigung einer Funktion f an einer Stelle $x_0$ mit Hilfe der elementaren Ableitungsregeln berechnen.<br>- die Kurvenpunkte zu einer vorgegebenen Steigung mit Hilfe der elementaren Ableitungsregeln berechnen. | | | |
| **8** | S. 105-113<br>Üb. 8-12<br>Üb. 14-18 | - als erste Anwendungen der Ableitung den Steigungswinkel $\alpha$ und die Gleichung der **Tangente** bzw. **Normalen** einer Funktion f an einer Stelle $x_o$ bestimmen.<br>- die Hoch- und Tiefpunkte von f und<br>- die **Schnittwinkel** zweier Funktionsgraphen berechnen. | | | |

**Vermischte Übungen:** S. 72-75, 80-83, 91/92; 103/104 und 111-113 **Überblick** S. 116 - 117 **Tests**: S. 93/118

**Übungstest** **„Einführung des Ableitungsbegriffs"** Name: ..................

Rechnen Sie auf einem Blatt und notieren Sie hier **nur** die Ergebnisse.

| | |
|---|---|
| **1) Bestimmen Sie jeweils die Grenzwerte:**<br>**a)** $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{x}) = \lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x}) =$ **c)** $\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(\frac{x^2}{x-4}) =$<br>**b)** $\lim_{x\to-\infty}(\frac{8x+1}{2x}) =$ **d)** $\lim_{x\to 4}(\frac{x^2-16}{x-4}) =$ | (4) ☐<br>(6) ☐ |
| **2) Differenzenquotienten berechnen und interpretieren**<br>**a)** Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ für die Stelle $x_0 = 1$ und $h = 1$. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$<br>**b)** Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ der Funktion f im Intervall [0; 1]. $\frac{\Delta f}{\Delta x} =$<br>**c)** Geben Sie die Bedeutung der ***mittleren Änderungsrate*** von a) an für den Fall, das x die Zeit in Tagen und f (x) die Höhe einer Pflanze in cm angibt:<br>............................................................................................................ | (2) ☐<br>(3) ☐<br>(2) ☐ |
| **3) Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen und interpretieren**<br>**a)** Berechnen Sie den Grenzwert des Differenzen-quotienten der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ für die Stelle $x_0 = 3$. **$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} =$**<br>**b)** Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$. **$f'(2) =$**<br>**c)** Geben Sie die Bedeutung der ***lokalen Änderungsrate*** von a) an für den Fall, das x die Zeit in Tagen und f (x) die Höhe einer Pflanze in cm angibt:<br>............................................................................................................ | (5) ☐<br>(5) ☐<br>(2) ☐ |
| **4) Ableitungsfunktion bestimmen**<br>Berechnen Sie die Ableitungsfunktion f ' der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ als Grenzwert des Differenzenquotienten: **$f'(x) =$** | (5) ☐ |
| **5) Bedeutung der Steigung eines Graphen in einem Punkt**<br>Erläutern Sie in zwei Sätzen den Zusammenhang zwischen Ableitungsfunktion, Grenzwert des Differenzenquotienten, Tangentensteigung und lokaler Änderungsrate einer Funktion f.<br>............................................................................................................<br>............................................................................................................ | (4) ☐ |
| **6) Ableiten mit Hilfe der Potenzregel, Summenregel und Faktorregel**<br>Bilden Sie jeweils die Ableitung:<br>**a)** $f(x) = 4x^4 + 3x + 9 \rightarrow f'(x) =$ **b)** $f(x) = \frac{3}{x^2} \rightarrow f'(x) =$ c) $f(x) = 5\sqrt{x} \rightarrow f'(x) =$ | (4) ☐<br>(3) ☐<br>(3) ☐ |
| **7) Steigung des Graphen einer Funktion in einem Punkt $P(x_0; y_0)$**<br>**a)** Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Punkt P(3; 10). **f '(  ) =**<br>**b)** Berechnen Sie den Punkt auf den Graphen von f, in dem die Steigung 10 beträgt. **P(  ;  )** | (3) ☐<br>(3) ☐ |
| **8) Tangente und Normale einer Funktion in einem Punkt $P(x_0; y_0)$**<br>**a)** Bestimmen Sie die Tangentensteigung der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_o = 2$. **m =**<br>**b)** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t der Funktion f an der Stelle 2. **t(x) =**<br>**c)** Bestimmen Sie die Normale n der Funktion f mit der Steigung m = 10. **n(x) =**<br>**Schnittwinkel zweier Kurven**<br>**d)** Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2+2x+2$. $\boldsymbol{\alpha} \approx$ | (2) ☐<br>(4) ☐<br>(4) ☐<br>(6) ☐ |

Gesamtpunktzahl: von 70

**Lösungen Übungstest „Einführung des Ableitungsbegriffs"**

**1.** $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{x}) = 2$; $\lim_{x\to-\infty}(\frac{8x+1}{2x}) = 4$; $\lim_{x\to4}(\frac{x^2-16}{x-4}) = 8$; $\lim_{\substack{x\to4\\x<0}}(\frac{x^2}{x-4}) = -\infty$

**2.** a) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3$; b) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$; c) Von der ersten bis zur zweiten Stunde beträgt die Wachstums-geschwindigkeit der Pflanze durchschnittlich 3 cm pro Tag.

**3.** a) $f'(3) = \ldots = \lim_{h\to0}(6+h) = 6$; b) $f'(2) = \ldots = \lim_{h\to0}(4+h) = 4$;
c) Zur Zeit t = 3 beträgt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze 6cm pro Tag.

**4.** $f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ldots = \lim_{h\to0}(2x+h) = 2x$.

**5.** Die Ableitungsfunktion ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten und gibt die Tangentensteigung und damit auch die lokale Änderungsrate einer Funktion f an einer beliebigen Stelle x an.

**6.** a) $f'(x) = 16x^3+3$ b) $f'(x) = \frac{-6}{x^3}$; c) $f'(x) = \frac{2{,}5}{\sqrt{x}}$.

**7.** a) $f'(3) = 6$; b) P(5/ 26). **8.** a) m = 4; b) t(x) = 4x - 3; c) n(x) = 8x – 27.

**8.** d) $\alpha = |\tan^{-1}(f'(-1)) - \tan^{-1}(g'(-1))| \approx 63{,}4°$.